Leonhard Fellermayr WS 03/04
Mat.Nr. 221281305090
Tutorium Mi 14-16 (Reitmeier, HS 221 Hgb.) 18.01.04

Übungen zur Vorlesung **Informatik I**

Blatt 11 - Lösungsversuch (Abgabe bis 26.01.04)

Schriftliche Aufgabe S-45[1]

Nach der rekursiven Definition[2] ist ein Binärbaum entweder

- *leer* oder
- besteht aus einem Knoten (*Wurzel*) und zwei Binärbäumen, dem *linken* und dem *rechten* Teilbaum.

Zu zeigen: Ein Baum der Höhe h hat höchstens $2^h - 1$ Elemente.

1. Induktionsbeweis

Beweis der Behauptung via vollständiger Induktion auf h.

- **Induktionsanfang:** Der Baum B ist leer (Höhe $h = 0$) und besteht somit aus 0 Elementen. Damit ist $h = 0 = 2^0 - 1$.
- **Induktionsschritt:** Der Baum B besteht aus der Wurzel W, einem linken Teilbaum L und einem rechten Teilbaum R. Die beiden Teilbäume L und R haben jeweils die Höhe $h - 1$ und damit (nach Induktionsvoraussetzung) *jeweils* maximal $e_{max}(L) = e_{max}(R) = 2^{h-1} - 1$ Elemente.

  Summiert ergibt sich damit für die maximale Anzahl Elemente des Gesamtbaums

$$e_{max}(B) = e_{max}(L) + e_{max}(R) + 1 = 2 \cdot (2^{h-1} - 1) + 1 = 2^h - 1.$$

2. Herleitung aus den Eigenschaften der Binärbäume

Die rekursive Definition von Binärbäumen (s.o.) impliziert: "Ein *Binärbaum* ist dadurch charakterisiert, dass jeder Knoten genau zwei Söhne hat."
Bei "Maximalausbau" eines binären Baums verdoppelt sich damit die Anzahl der Knoten von Ebene zu Ebene (beginnend mit der Wurzel des Gesamtbaums).
Deshalb gilt:

Ein Binärbaum der Höhe h mit den Ebenen $e \in \{0; ...; h-1\}$ kann pro Ebene maximal 2^e Elemente haben.

Formal ausgedrückt hat der Binärbaum maximal $\sum_{e=0}^{h-1} 2^e$ Elemente.
Mit der Formel für die *endliche geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

ergibt sich diese Summe zu

$$\sum_{e=0}^{h-1} 2^e = \frac{1 - 2^{(h-1)+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^h}{-1} = 2^h - 1.$$

[1] Die Programmieraufgaben P-43, P-44, P-46 wurden per WWW abgegeben.
[2] vgl. Gumm/Sommer, Einführung in die Informatik, S. 312f.